Continuidad en un intervalo

Continuidad en un intervalo cerrado

Una función **f(x) es continua en un intervalo cerrado** [a, b] si:

- **f es continua en x, para todo x perteneciente al intervalo abierto (a, b)**
- **f es continua en a por la derecha:**

  $$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

- **f es continua en b por la izquierda:**

  $$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Consecuencia

Si f es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f está acotada en dicho intervalo.

Ejemplo:

Estudiar la continuidad $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ de en el intervalo [0, 4]

f(x) es continua por la izquierda en x = 0 , ya que f(x) = x^2 por ser una función polinómica es continua en toda $\mathbb{R}$.

f(x) es continua por la derecha en x = 4 , ya que f(x) = 4 por ser una función polinómica es continua en toda $\mathbb{R}$.

Para que f(x) sea continua en todos los puntos del intervalo (0, 4) tenemos que estudiar la continuidad en el punto x = 2, que es el único dudoso por tratarse de una función definida a trozos.

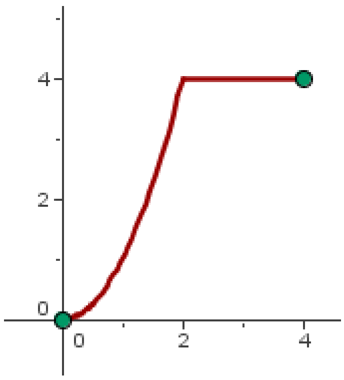
f(2)= 4

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to -2^+} 4 = 4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$



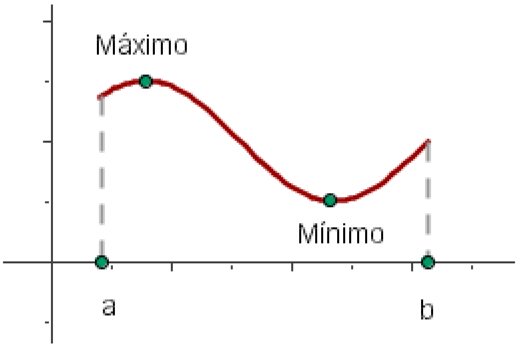
Por tanto **f(x) es continua en el intervalo [0, 4]**.

Teorema de Weierstrass

Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].

Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \qquad Si\ \ x \in [a,b]$$



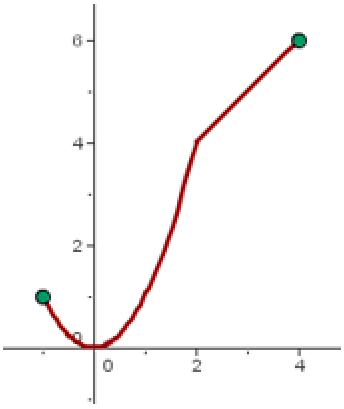
El teorema de Weierstrass **no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo**, **sólo afirma que existen.**

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ x < 2 \\ x+2 & si\ \ x \ge 2 \end{cases}$$

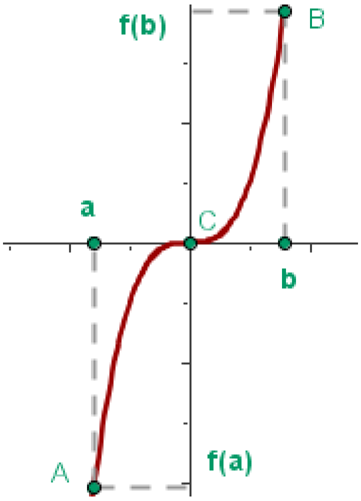
es continua en el intervalo [-1, 4]

$$0 \le f(x) \le 6 \qquad Si\ \ x \in [-1,4]$$



Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un c ∈(a, b) tal que f(c) = 0.



Ejemplo:

- Comprobar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0,1].

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 1$, que es continua en [0,1] por ser polinómica. Estudiamos el signo en los extremos del intervalo:

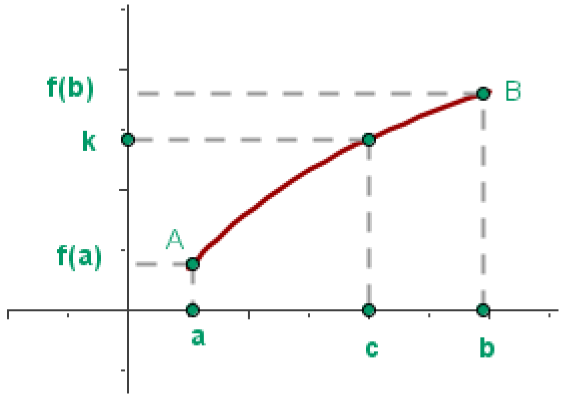
$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Como los signos son distintos se cumple el **teorema de Bolzano**, por tanto existe un **c** $\in$**(0. 1)** tal que **f(c) = 0**. Lo que demuestra que tiene una solución en ese intervalo.

Propiedad de Darboux

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y k es un número comprendido entre los valores f(a) y f(b), entonces existe algún c en (a, b) tal que f(c) = k



Si Observamos el dibujo podemos definir la **propiedad de Darboux** de este otro modo:

Si una función es continua en el intervalo [a, b] la función alcanza en este intervalo todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).

Ejemplo:

Probar que la función f(x) = x(sen x +1) toma el valor 2.

La función es continua en toda ℝ por se el producto de dos funciones continuas.

Tomamos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y estudiamos el valor de las imágenes de los extremos:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 < 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 2$$

Por tanto existe un c $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$tal que f(c) = 2